Turkish Journal of Giftedness and Education
2018, Vol 8, Issue 2, 181-199
Türk Üstün Zeka ve Eğitim Dergisi
2018, Cilt 8, Sayı 2, 181-199

Güçyeter, Ş. (2018). Identification of mathematical talent: Similarity and relation based model of thinking in math. *Turkish Journal of Giftedness and Education, 8*, 2, 181-199
Received: 05 Sept 2018; Accepted: 10 Nov 2018

Identification of Mathematical Talent: Similarity and Relation based Model of Thinking in Math

Matematiksel Yeteneği Tanılama: Matematikte Benzerlik ve İlişki Temelli Düşünme Modeli*

Şule Güçyeter [1]

Abstract

There are many debates about identification of mathematically talented students. In this study, a model called as Similarity and Relation based Model of Thinking in Math, which was developed to identify and educate mathematically gifted and talented students was explained. The model consisted of three main structures as problem solving, problem posing and problem comparing. Each of these structures has two sub-structures based on similarity and relation concepts, which are called as similarity based problem solving, relation based problem solving, similarity based problem posing, relation based problem posing, finding similar problems and finding related problems. The model was developed on the basis of how mathematicians work and the core skills mathematicians use. In the model, analogical thinking which is one of the core cognitive abilities is considered as similarity and relation based thinking. This model is based on one of the core cognitive abilities, with this respect it differs from the other models in the literature. By using this model, paper-pencil tests, alternative assessment tools for identification of mathematically talented students can be developed and educational activities and programs for mathematically talented students can be developed.
Key Words: mathematical talent, identification, similarity, relation

Öz

Matematikte üstün yeteneklileri tanılamayla ilgili alan yazında çeşitli tartışmalar mevcuttur. Bu çalışmada matematik alanında üstün yetenekli öğrencilerin tanılanma ve eğitim sürecinde kullanılmak amacıyla geliştirilen Matematikte Benzerlik ve İlişki Temelli Düşünme Modeli tanıtılmıştır. Model problem çözme, problem kurma ve problemleri karşılaştırma olarak adlandırılan üç ana yapı ve bu yapıların her birinde benzerlik ve ilişki kavramları temel alınarak oluşturulmuş benzerliğe dayalı problem çözme, ilişkiye dayalı problem çözme, benzerliğe dayalı problem kurma, ilişkiye dayalı problem kurma, benzer problemleri bulma ve ilişkili problemleri bulma olarak adlandırılan altı alt bileşenden oluşmaktadır. Model matematikçilerin nasıl çalıştığı ve matematiksel yetenek için çekirdek olan becerilerin neler olduğunun araştırılması üzerine geliştirilmiştir. Modelde çekirdek bilişsel becerilerden biri olan analojik düşünme, benzerlik ve ilişki temelli düşünme olarak ele alınmıştır. Model matematiksel yeteneği tanılamada çekirdek bir beceriyi temel alması yönüyle alan yazındaki diğer modellerden farklılaşmaktadır. Model kullanılarak matematikte üstün yetenekleri tanılamada kağıt kalem testleri, alternatif değerlendirme araçları ile eğitsel etkinlik ve programların da geliştirilmesi umulmaktadır.
Anahtar Sözcükler: matematiksel yetenek, matematikte üstün yetenekli, tanılama, benzerlik, ilişki

Summary

Purpose and significance: In recent years, there has been an increasing interest in studies about gifted students in Turkey. One of the most important specific areas is mathematics for gifted and talented students. Mathematics is an indispensable skill for a well-defined community life and an extremely convenient area for problem solving. It is undisputable that mathematics and mathematics knowledge are essential for the advancement in science and technology and innovation. It can be said that the need for mathematics requires emphasis on mathematics education and the

Makale Matematiksel Yeteneği Tanılama adlı doktora tezinden üretilmiştir.

[1]*Corresponding author, Assist. Prof., Uşak University, Faculty of Education, Special Education Division, Uşak, Turkey; sule.gucyeter@usak.edu.tr*

ISSN 2146-3832, http://www.tuzed.org

support of talented students working actively in this field. There is also a need of appropriate education and training opportunities for talented students to develop their skills. In order to meet this need, in the present study, Similarity and Relation based Model of Thinking in Math (SRMT-M) based on theoretical foundations is introduced.

Methods: The procedure for the development of the model included following steps: Firstly, the nature of mathematics and the methods of mathematicians were investigated. The question that what they are dealing with and concepts related to mathematical ability in literature were clarified. Further characteristics of gifted students in mathematics, the definitions, models and approaches to identify talents in mathematics were examined.

Results. The model "Similarity and Relation based Model of Thinking in Math" (SRMT-M) includes three main components: problem solving, problem building or posing and comparing problems. Each of these components has two sub-dimensions called as similarity based problem-solving, relation based problem solving, similarity based problem posing, relation based problem posed, finding similar problems, and finding relational problems.

Conclusions. It is thought that mathematical ability should be examined in terms of similarity and relation concepts (as analogy) which are supposed to be basic core cognitive skills (Hofstadter, 2001), important elements of various cognitive skills (Gust, Krumnack, Kühnberger & Schwering, 2008) and are also assumed to have a great role in the emergence of mathematical ability and its reflection on performance (Poincare 1907; Polya, 1954). It is thought that the way of mathematical thinking that interacts with understanding mathematical knowledge and keeping it in memory will be activated through problem solving, problem finding, and comparison of problems.

It is assumed that general cognitive abilities act as a specific ability in the use of mathematical symbols, letters, figures, objects, and so on (Krutestkii, 1976). The idea of Krutetskii (1976), that a skill or tool associated with this general ability, behaves as a specific skill in dealing with mathematical content has been applied to the concepts of similarity and relation. In addition, analogical thinking in the model is considered as similarity and relation based thinking. This model is different from other identification models and approaches as it is based on the core cognitive abilities (eg. Kim, Cho, & Ahn, 2003; Osborn, 1983; Sak, 2005; Wilmott, 1983).

Researchers can develop paper-pencil tests, alternative assessment tools for identification of mathematically talented students. Further educators can develop curriculum activities or math programs for talented students.

Giriş

Ülkemizde son yıllarda üstün yetenekli öğrencilere yönelik ilgi eskiye oranla artmış ve artarak devam etmektedir. Üstün zeka ve üstün yetenek konularının çalışılabileceği toplumsal açıdan da önem arz eden değerli spesifik alanlardan birisi de matematiktir. Matematik iyi tanımlanmış, toplum yaşamı için vazgeçilmez bir yetenek alanı olup problem çözme ve problem üretmeye de son derece elverişli bir alandır (Sak, Karabacak, Kılıç ve Öksüz, 2010). Matematiğin bilimsel ve teknolojik gelişmelere matematiksel bilgi üreterek ya da var olan matematiksel bilginin uygulama alanlarına aktarılması gibi yollarla hem öncülük etmesi hem de katkı sağlaması onun önemini daha da arttırmaktadır. Matematiğin bu tür gelişimlere olan katkısı onu devletler için de vazgeçilmez kılmaktadır. Ayrıca gündelik hayatta karşılaşılan birçok problemin çözümünde de işlevsel olduğu için matematik sadece toplumsal düzeyde değil bireyler için de önemlidir. Bilim ve teknolojideki gelişmeleri takip edebilmek, ilerlemek, yeni teknolojik gelişmelere ayak uydurarak yenilik üretebilmek vb. noktalarda matematiğe, matematiksel bilgiye ihtiyaç duyulması kaçınılmazdır. Matematiğe duyulan ihtiyaç, matematik eğitimine önem verilmesi ve o alanda yetenekli kişilerin alanda daha aktif çalışmasının desteklenmesini gerektirdiği söylenebilir. Ayrıca bu durum, matematikte yetenekli öğrencilerin tanılanarak yeteneklerini geliştirecek uygun eğitim öğretim olanaklarıyla buluşturulması ihtiyacını da doğurmaktadır.

Yetenek kayıplarının önlenmesi, bilim ve teknolojideki gelişmeleri yakından takip edebilme noktasında önemli bir alan olan matematikte, üstün yetenekli bireylerin olabildiğince erken tanılanarak uygun eğitim öğretim ortamlarıyla buluşturulmasının bir ihtiyaç, hatta gereklilik olduğu söylenebilir. Bu ihtiyacın karşılanması noktasında mevcut çalışmada matematikte üstün yetenekli öğrencilerin tanılanmasında kullanılmak üzere geliştirilen kuramsal temellere dayanan bir tanılama modeli olan Matematikte Benzerlik ve İlişki Temelli Düşünme Modeli (MBİTD-M) tanıtılmıştır.

MBİTD-M'nin geliştirilme süreci ve teorik/ kuramsal temellerinin anlaşılması için öncelikle matematiğin doğası ve matematikçilerin çalışma biçimleri, ne ile uğraştıkları, alan yazındaki matematiksel yetenekle ilişkili kavramlar, matematikte üstün yetenekli öğrenci özellikleri, alan yazında matematikte üstün yeteneklileri tanılamada temel alınan tanım, model ve yaklaşımlar tartışılmıştır. Ardından MBİTD-M açıklanmıştır.

Matematiğin Doğası

Alan yazında matematik tanımlanması zor kavramlardan biri olarak kabul edilmekte olup (Umay, 2002), tek bir geçerli bir tanımını bulmanın oldukça zor (Napoles Valdes, 2012) olduğu ifade edilmektedir. Bernard Russell (2010) matematiğin "P doğru ise Q doğrudur" biçimini alan önermeler kümesinden oluştuğunu ifade etmiştir (s. 3), ki bu tanımda matematiğin simgesel mantıkla özdeşleştirilen, doğruluğu geçerli çıkarımlarda arayan, biçimsel bir disiplin olma özelliğinin (Yıldırım, 2008b) öne çıktığı söylenebilir. Altun (1998) matematiği tanımlarken, onun ardışık ve yığılmalı ilerlemesi; varlıkların kendileriyle değil aralarındaki ilişkilerle ilgilenmesi, kendine özgü bir dili olması ve insan beyni tarafından yaratılan bir soyutlama olması özeliklerini ön plan çıkarmıştır. Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) matematik program kitabında matematik; "örüntülerin ve düzenlerin bilimi", "sayı, şekil, uzay, büyüklük ve bunlar arasındaki ilişkilerin bilimi" olarak tanımlanmaktadır (2009, s. 7). Ayrıca matematiğin bilgiyi işleme, üretme, tahminlerde bulunma problem çözmeyi içerdiği vurgulanmıştır. Başka bir tanımda matematik: "sayı, nokta, küme, fonksiyon türünden soyut nesnelere özgü özellikleri ortaya çıkarma, belirleme ve mantıksal olarak kanıtlama (ispatlama) bilimi" olarak tanımlanmıştır (Yıldırım, 2008a, s. 13).

Devlin'e (2000) göre matematikçiler gerçek veya imgesel (imagined), görsel veya zihinsel, statik veya dinamik, niteliksel veya niceliksel, faydalı (utilitarian) veya eğlenceli (recreational) örüntülerle çalışmaktadır. Bu nedenle de bugünün matematikçilerinin "matematik nedir?" sorusuna "örüntülerin bilimidir" şeklinde genel bir cevap verebileceklerini ifade etmiştir. Kimi zaman matematiği tanımlamaya çalışanlar onu "mantıklı düşünmenin, akıl yürütmenin, problemleri saptamanın ve çözüm üretmenin dili" gibi bazı özelliklerini sıralamakla yetinmektedirler (Umay, 2002). Tanımlar incelendiğinde matematiğin ardışık ve yığılmalı ilerleyen, soyutlamalar içeren, kendine ait bir dili olan, ilişkilerle ilgilenen, bilgiyi işleyen ve üreten bir bilim dalı olma özelliklerinin vurgulandığı söylenebilir.

Matematikçiler Ne ile Uğraşır?

King (2006)'da matematikçilerin işinin matematik yapmak olduğu, matematikçilerin bunu yaparken de kendi ürettikleri soyutlanmış nesnelerle uğraştıkları belirtilmiştir. Bu soyut nesnelere yaratıcıları olan matematikçiler tarafından bazı özellikler atfedildiği, sonra bu özelliklerin temel alınarak, matematiksel ve mantık kurallarının kullanılmasıyla yeni, başka özellikler çıkarsamayla uğraşıldığı da ifade edilmiştir.

King (2006) matematiksel görevleri kendi içinde önem sırasına koyarak açıklamıştır. Bu önem sıralamasının ilk basamağında çözümünü bilmediğimiz bir problemi çözme görevi yer almaktadır ki bu en az önem derecesine sahip bir matematiksel araştırma olarak görülmektedir. Bunun üzerinde öneme sahip olan görev, araştırmacının kendisinin bir problem kurarak bunu çözmesidir. Araştırmacının kurduğu problem, yeni bir problem ise bu söz konusu görevin önem derecesini arıttıran bir unsur olarak değerlendirilmektedir. Yeni bir problem kurmadan daha önemli olan şey ise, yeni bir problem kurup bunu çözebilme görevidir ki bu üst düzey bir araştırma yapmayı gerektiren bir durum olarak görülmektedir. En önemli araştırma ise, hem orijinal hem de önemli olma özelliklerini taşıyan, aynı zamanda araştırmacının çözüm bulma kapasitesi içinde bir problem bulma olarak görülmektedir. Ayrıca King, iyi matematikçilerin probleme büyük önem veren kişiler olduklarını, önemi ve zarafeti olan bir problem dikkatlerini çektiğinde bu kişilerin o problemi çözmek için gerekli matematiksel yöntemleri öğrenen yoksa da yaratanlar olduğunu da vurgulamıştır. Buna karşılık sıradan matematikçilerin yalnız bildiği yolları kullanma ve bildiği yöntemlerle çözülecek problemler bulma eğiliminde olduğunu da belirtmiştir (King, 2006).

Hardy (1999) matematiği, gerçek ve önemsiz matematik olmak üzere iki kategoride incelemiştir. Gerçek matematik, yaşamı kolaylaştırma amacında değil doğruya ulaşma amacındadır ki gerçek matematikle uğraşan matematikçi bilme, anlama, öğrenme merakıyla araştırma yapmaktadır. Bu nedenle de gerçek matematikçi araştırmasının faydalı olup olmayacağıyla ilgilenmemektedir (Yıldırım, 2008). Matematiğin çeşitli uygulamaları yönüyle yararlı olduğunu vurgulayanların ise Hardy'e göre ikinci tür (önemsiz sayılan) matematikten bahsettiği söylenebilir.

Hardy (1999) satranç problemlerinin de gerçek matematik olduğunu, ancak önemsiz görüldüğünü ifade etmiştir. Bununla birlikte Hardy "bir matematiksel teoremin ciddi olup olmamasını, uygulamadaki sonuçlarına değil, aralarında bağlantı kurduğu matematiksel fikirlerin taşıdığı öneme" atfetmektedir (s. 67). Ayrıca bir matematiksel düşüncenin diğer matematiksel düşüncelerin büyük bir bölümü ile doğal ve aydınlatıcı bir bağlantı kurabilme düzeyinin onun önem derecesini belirttiğini düşünmektedir.

Yukarıdaki açıklamalardan görüldüğü üzere matematiksel araştırma yapmada problem çözme ve problem kurup çözme (teorem ortaya atma da problem kurmanın içinde düşünülmüştür) önemli görülmektedir. Ayrıca matematiksel araştırmanın kalitesi ve niteliğinin yenilik, matematik açısından önem arz etme, orijinallik, matematiksel fikirler arasında bağlantı kurma ölçütlerini içermesine göre arttığı söylenebilir. Bu noktada profesyonel düzeyde matematikçi olabilme ve matematiği ileriye taşımak için de özellikle matematik alanında yetenekli öğrencilerin bu becerilerinin geliştirilmesinin önemi görülebilir.

Peki matematik yaparken problem çözme ve problem bulma görevlerinde hangi beceriler, yetenekler ya da düşünme biçimleri kullanılmaktadır? Polya (1954) matematikte ve diğer bilimlerde düşünmenin; tümdengelimsel (ispatlayıcı) muhakeme (deductive reasoning) ve akla yakın muhakeme (plausible reasoning) olmak üzere iki türde gerçekleştiğini ifade etmiştir. Polya'ya göre bir matematik ispat dedüktif / tümdengelimsel muhakeme sahasına girerken; fizikçinin indüksiyon/ tümevarım yoluyla, avukatın ifadelerden, tarihçinin vesikalardan ve iktisatçının istatistiklerden netice çıkarması da akla yakın muhakeme sahasına girmektedir. Ayrıca dedüktif muhakeme emin, su götürmez ve kesin sonuçlar sağlarken, yeni bir bilgi verebilme kabiliyetinden yoksundur; buna karşın akla yakın muhakeme ise riskli, tartışmaya açık ve geçici sonuçlar sağlayarak dış dünya hakkında öğrenilen her yeni şeyde rol almaktadır (Polya, 1954).

Akla yakın muhakeme genelleştirme, özelleştirme ve analoji (benzetme) adlarını taşıyan keşif kaynaklarına sahiptir (Polya, 1954). Matematik yaparken "verilen bir kümenin elamanlarını dikkate alıp o kümeyi içeren daha büyük bir kümenin elemanlarını ele almaya geçme", genelleştirme (s. 12); "verilen bir kümenin elemanlarını ele alıştan, o kümenin içinde bulunan daha küçük bir kümenin elemanlarını ele alma", özelleştirme (s. 13) olarak tanımlanmıştır (Polya, 1954). Matematik yapmada akla yakın muhakemeyi kullanmadaki bir diğer keşif aracı olan analoji, Polya'ya göre bir benzetme olup sıradan benzetmeden farklı değildir. Polya (1954)'e göre matematikteki benzetme daha belirli, kavramlar düzeyindedir. Matematikteki benzerliklerle diğer benzerlikler arasındaki farkın düşünen kişinin niyetinde olduğu belirtilmiştir. Benzer şeylerin birbirleriyle bir yönde uyuştuğu, ortak olan yönü belirli kavramlara çevirmek istediğimizde bunlara benzer şeyler gözüyle baktığımız söylenebilir (Polya, 1954). Eğer bu hususta berrak kavramlara varabilmişsek de, benzerliği izah etmiş olacağımız ifade edilmiştir. İki sistemden birinin parçaları arasında açık olarak belirlenmiş olan ilişkiler, diğerinin bunlara karşılık gelen parçaları arasındakilere uyuyorsa bu iki sistem benzer olarak görülmektedir. Polya'ya göre matematikte benzerliğin ölçülebilir veya kavram olarak betimlenebilir olma amacı vardır. Yeterli derecede açıklanmayan bazı benzerliklerin tek anlamlı olmayabileceği, söz konusu nesneler arasında birden fazla benzerliklerin olabileceği, bu nedenle belirsiz benzerliklerin de önemsenerek, onları değerli hale getirmek için açıklanmaya çalışılması gerekmektedir (Polya, 1954).

Polya matematiksel keşiflerde analojinin büyük bir hisseye hatta bazen aslan payına sahip olduğunu da ifade ederek analojiler üzerinden benzerliklerin matematik için önemine değinmiştir.

Özellikle matematiksel bilgi üretimindeki rolü nedeniyle benzerlik ve ilişkisel benzerliklerin (analoji) önemsenmesi ve nesneler arasındaki belirsiz benzerliklerin de açıklanmaya çalışılması vurgulanmıştır.

Poincare'e (1907) göre matematikçiler birbirine zıt, birbirinden farklı iki tür zekaya sahiptir. Bazı matematikçiler mantıkla meşgul olup adım adım ilerlerken; bazıları da sezginin peşinden giden, ilk hamlede birtakım kazançlar elde eden, cesur süvari öncüleri gibi kararsızdırlar. Poincare (1989) mantıkçılar ve sezgicilerin her birinin ötekinin yapamayacağı büyük işler başardığını; bu nedenle bilimin ilerlemesinde hem analizci hem de sezgici matematikçilere ihtiyaç duyulduğunu vurgulamıştır. Poincare, sezginin de akla yakın muhakeme gibi kesinliğe götürmediği için matematikte bir evrinme olması gerektiğini düşünmektedir. Yine Poincare tanımlara kesinlik verilmeden muhakemelere kesinliğin giremeyeceğinin herkes tarafından kabul gördüğünü ifade etmiştir. Ona göre analizde eşitlik veya eşitsizlik ağlarıyla birbirine bağlı tam sayılardan yahut sonlu veya sonsuz tam sayılar sisteminden başka bir şey kalmamıştır, matematik bilimleri adeta aritmetikleşmiştir.

Poincare (1989) çıkarsamalarda da sezgiye başvurulduğunu ifade etmiştir. Ayrıca Poincare, salt mantık kullanılarak genellemelere gidilebileceği, ancak yeni şeylerin salt mantıkla yaratılamayacağının da altını çizmiştir. Poincare'a (1989) göre aritmetik, geometri veya başka bir bilimde yaratımda bulunmak için salt mantık dışında sezgiye ihtiyaç duyulmaktadır. Poincare'e göre birkaç çeşit sezgi vardır. Sezginin bir türü duyulara ve hayal gücüne dayalıdır; bir diğeri indüksiyon yoluyla genelleştirmedir; bir diğeri de salt sayı sezgisidir. Salt sayı sezgisinden kasıt ise matematiksel tümevarım (induction) olarak da bilinen ispat yöntemidir (Polya, 1954; Poincare, 1989). Poincare bu üç sezgi türünden ilk ikisinin kesinlik sağlamadığı, ancak üçüncüsünün kesinliğinin şüphesiz olup bizi aldatmayan tek sezgi çeşidi olduğunu söylemiştir.

Salt analiz araştırmacıya bir çok metotlar sunar, bu metotların yanılmazlığını da garanti edecek bir çok farklı yol da gösterebilir (Poincare, 1989). Araştırmacı bu yolların her birinde güvenle ilerleyebilir, engelle karşılaşmaz, ancak bu yollardan hangisinin hedefe daha çabuk götüreceğini salt analiz söylemez. Hangi yolu seçmemiz gerektiğini sezgi söyleyebilir. Poincare, sezginin mantığı tamamlama rolünü denge ağırlığı/ panzehir rolü olarak adlandırmıştır. Poincare'e (1907) göre sezgi; hem keşif yolcusunun yolunu seçmesi için gereklidir, hem de bu keşif yolcusunun izinde yürüyen ve niçin bu yolu seçmesi gerektiğini öğrenmek isteyen kişi için de gereklidir. Yine mantığın tek başına yeterli olmadığını, sezginin onu tamamlama rolünü koruması gerektiğini de ifade etmiştir.

Poincare (1907) analizcilere/ mantıkçılara yol gösterip aydınlatanın salt sayı sezgisi olduğunu, bu nedenle analizcilerin yalnız ispat değil icat da yapabildiklerini ifade etmiştir. Hatta analizcilerin salt sayı sezgisini kullanarak, duyuların müdahalesi olmaksızın bir mantık yapısının genel planını bir bakışta görebildiklerini de söylemiştir.

Poincare (1907) matematiksel çıkarsama/ muhakemenin matematiksel tümevarım ile özelden genele doğru geçebildiği, bu yolla analizcilerin matematiği ilerlettiğini ifade etmiştir. Analizcilerin ispatlarının dikkatli, ayrıntılarıyla incelenmesi sonucunda burada sadece Aristo'nun klasik kıyasının olmadığı matematiksel tümevarımın da olduğunu belirtmiştir. Analizcilerin ulaşmak istedikleri hedefe giderken, yolu sezmeleri için analojileri kılavuz olarak kullandıklarını ifade etmiştir. Bu durumu bir örnek üzerinden de izleyen şekilde açıklamıştır. Örneğin, analizcilerin çok sevdiği muhakemelerden biri majoran fonksiyonların kullanılması esasına dayanmaktadır ki bu muhakeme birçok problemin çözülmesinde işe yaramaktadır. Bu muhakemeyi yeni bir problem çözümüne uygulamak isteyen bir araştırmacının (ki bunu mucit olarak da görmektedir) rolü nasıl açıklanabilir? Poincare'e göre mucid, öncelikle bu sorunun aynı metotla/ yöntemle çözülmüş başka sorularla olan benzerliğini bilmesi gerekmektedir. Sonra mucit, bu yeni sorunun hangi bakımdan diğerlerinden farklı olduğunu görmeli ve metot için gereken değişiklikleri/ modifikasyonları buradan çıkarabilmelidir. Poincare'e göre bu benzerliklerle farklar çok açık olabileceği gibi gizli de olabilmektedir. Bu benzerlik ve farklılıkların görülmesinde analojinin önemli bir rolü olduğu, analizcilerin öncelikle gizli analojileri elden kaçırmamak, mucit olabilmek için duyuların ve hayal gücünün yardımı olmaksızın bir çıkarımın birliğini yapan şeyi doğrudan doğruya duyabilmeleri gerektiğini belirtmiştir.

Matematikçilerin ne ile uğraştığı sorusuyla ilgili King (2006) ve Hardy (1999) daha çok matematiksel araştırma veya matematik yapmada problem çözme ve problem bulma görevlerine değinirken; Polya (1954) ve Poincare (1907, 1989) bu görevleri yaparken kullanılan muhakemeler, zihin türlerine ve bunların alt bir becerisi kabul edilen, keşif araçları ve kılavuz olarak görülen analojilerin önemine değindikleri söylenebilir

Matematiksel Yetenek Kavramları

Alan yazında matematik alanında üstün yetenekli bireyleri tanımlamak için matematiksel yetenek (mathematical ability, mathematical talent) kavramının yanında matematiksel yetkinlik (mathematical proficiency), matematikte erken gelişmiş (mathematical precocious), matematikte gelecek/ umut vaat etme (mathematical promise), matematikte üstün zekalılık (mathematical giftedness), matematikte üstün zekalı ve yetenekli (mathematically gifted and talented), matematikte yaratıcılık (mathematical creativity), matematiksel zeka (mathematical intelligence), matematiksel okuryazarlık (mathematical literacy), matematiksel güç (mathematical power) gibi çeşitli kavramların kullanıldığı görülmektedir. Matematikte yetenekli bireyleri tanılamaya yönelik model geliştirmede bu kavramların nasıl tanımlamadığını incelemek oluşturulacak modele teorik bir alt yapı kazandırmada faydalı olabilir. Bu nedenle bu kısımda söz konusu kavramların nasıl tanımlandığı ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler tartışılmıştır.

Krutuestkii'ye (1976) göre matematiksel yetenekler bazı doğal eğilimlerin üzerine şekillenen ve sonradan oluşan, gelişen yetenekler olup bu eğilimler basit yeteneklerin oluşumunda minimal bir role sahipken, seçkin matematikçilerin yetenek gelişimlerinde daha önemli bir yere sahiptir. Krutestkii (1976) araştırmasında okul çağındaki çocukların problem çözme becerilerini gözlemleyerek özellikle bu dönemdeki matematiksel yeteneği oluşturan bileşenleri; matematiksel bilgiyi elde etme/ bilgiye ulaşma (problemin biçimsel yapısını anlama), matematiksel bilgiyi işleme (matematiksel sembollerle düşünme, genelleme, matematiksel muhakeme ve işlemler yaparken kestirim yapma, kestirimsel düşünme, esnek zihinsel işlemler yapabilme, çözümün açık, basit ekonomik olması, muhakeme ve işlemlerde tersine çevirebilme) matematiksel bilgiyi muhafaza etme/ saklama (matematiksel işlemler, ilişkiler, problem çözme metotları vb. için genellenmiş hafızaya sahip olma) ve genel sentetik bileşen (matematiksel düşünüş şekline sahip olma) olarak birbirini etkileyen dört temel bileşen şeklinde ifade etmiştir. Bu bileşenler dışında varlığı zorunlu olmayan zihinsel işlemlerdeki hız, hesaplama yeteneği, sembol, sayı formülleri için hafıza, uzaysal kavramlar için yetenek, soyut ilişkileri ve bağları görselleştirme yeteneği gibi bileşenlerden de bahsetmiştir.

Matematiksel yetkinlik kavramı; bilgi temeli (matematikle ilgili kavramlar, gerçekler, matematiksel içerikle ilgili bilinmesi gereken bilgiler), stratejiler (problem çözmede kullanılan metotlar, yaklaşımlar), üst biliş (kişinin mevcut bilgiyle ne yaptığının farkında olması), inançlar ve eğilimler (kişinin uğraştığı problem/ durumla ilişkili gelişme göstereceğine inanması ve çabalaması) şeklinde dört kavramla ilişkilendirilerek açıklanmaktadır (Schoenfeld, 2007). Bir diğer kavram olan matematikte erken gelişmişlik, erken yaşta görülen ve nadir bulunan bir özelliktir (Sriraman, 2009a). Akranlarıyla kıyaslandığında beklenen süreden daha erken bir yaşta bazı gelişim aşamalarına ulaşan, bir diğer deyişle şu andaki gelişim aşamaları akranlarına değil kendilerinden yaşça büyük çocuklara benzerlik gösteren çocukları belirtmek için kullanılmaktadır (Keating & Stanley, 1973).

Matematikte gelecek/ umut vaat etme kavramı ise, daha çok Amerikan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) kullandığı bir kavramdır. Geleceğin lider ve problem çözen kişileri olma potansiyeline sahip kişiler olarak görülmektedirler (Bennett, Berriozabal, DeArmond, Sheffield, & Wertheimer, 1995). Bu kavramı açıklamada yetenekler (analitik ve yaratıcı), duyuşsal faktörler (global ve yerel düzeyde), sorumluluk ile ısrar ve olanak şeklinde dört öge kullanılmaktadır (Leikin, 2009).

Matematikte üstün zeka tanımının ise alan yazında oldukça dar ve genel bir şekilde yetenek, tutum, başarı testlerinden alınan puanların sonucuyla ilişkilendirilerek tanımlandığı söylenebilir (Gavin & Adelson, 2008). Sheffield bunun yani matematikte üstün zekalı kişilerin, bir matematik testinde %95'lik dilimin üzerinde olmayı sağlayacak kadar yüksek puan alan kişiler olarak da görüldüğünü ifade etmiştir (Sheffield, 1994). Bu genel tanımlardan farklı olarak Sak (2005, s. 83) matematikte üstün zekâlılığı "matematiğin herhangi bir branşında verilen bir zamanda üretim, yeniden üretim veya problem çözme formlarında sergilenen matematiksel yeterlilik" olarak daha kapsamlı tanımlamasını yapmıştır.

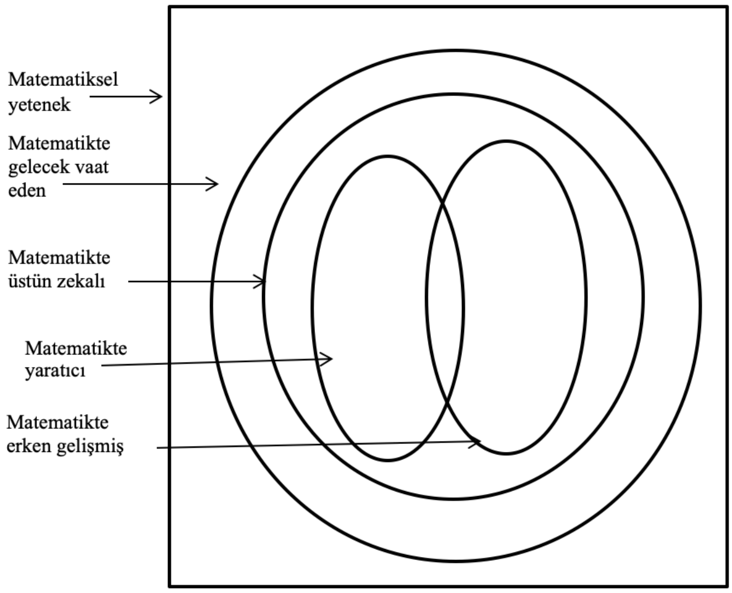
Sriraman (2005) matematiksel yaratıcılığı yetişkin/ profesyonel ve okul çağı olmak üzere iki farklı düzeyde tanımlamıştır. Profesyonel yaratıcılık; mevcut bilgi temelini anlamlı olarak genişleten, orijinal bir iş üretme yeteneği; diğer matematikçiler için yeni sorulara yol açma yeteneği olarak tanımlanırken, okul çağında yaratıcılık; bir problem veya analojik problemlere sıra dışı (yeni) ve/ veya içgörüsel çözümler üretmeyle sonuçlanan süreç, eski problemlere yeni bir bakış açısıyla bakmayı sağlayan yeni sorular/ problemler veya olasılıklar geliştirebilme olarak tanımlanmaktadır (Kuhn, 1962'den akt. Sriraman, 2005, s. 23).

Sriraman (2009b, s. 545) alan yazından derlediği özellikler üzerinden matematiksel zekayı izleyen özelliklerle ilişkili görmektedir: matematiksel yapıları soyutlama, genelleme yeteneği, veri yönetim tekniklerine başvurabilme/ kullanma yeteneği, mantıksal düşünme/ çıkarım yapma, analojik, herüstik düşünme, ilişkili problemler bulma, matematiksel işlemlerde esneklik, tersine çevirebilme, matematiksel ispata yönelik sezgisel farkındalık, matematiksel ilkeleri bağımsız keşfedebilme yeteneği, problem çözmede karar verme becerilerini kullanma, ampirik ve teorik ilkeleri ayırt etme yeteneği. Bu özelliklerde hem analitik hem de yaratıcı özelliklerin yer aldığı söylenebilir.

Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA) kapsamında matematik okur yazarlığı kavramının kullanıldığı söylenebilir. "Çeşitli bağlamlarda bireyin formüle etme, matematiği kullanma ve yorumlama kapasitesi" matematiksel okur yazarlık olarak tanımlanmaktadır (PISA, 2011, s.13). Matematiksel güç kavramı keşfetme, tahmin etme ve mantıksal düşünme yeteneği, rutin olmayan problemleri çözmek için çeşitli matematiksel metotları etkili olarak kullanma yeteneği üzerinden tanımlanmaktadır (NCTM, 1989). Söz konusu kavramın, matematiğin geliştirilecek kavram ve becerilerin bir birikiminden daha fazlası olduğunu temel aldığı ifade edilmiştir. Mandacı Şahin (2007) NCTM'nin matematiksel güç tanımını biraz daha detaylandırarak araştırmasında; "bireyin; belirlenen içerik çerçevesindeki kavramsal ve işlemsel bilgisini; muhakeme, ilişkilendirme ve iletişim becerileriyle bir arada ileterek, karşılaştığı problem durumun çözümünde kullanabilme yeterliği" olarak tanımlanmıştır (s. 5).

Matematiksel yetenekle ilişkili kavramlarda yer alan önemli beceriler ve noktalardan bazıları: matematik bilgisine sahip olma, onu kullanma, işleme; etkili problem çözmede kullanılan bilişsel stratejiler, analitik ve yaratıcı beceriler (genelleme, soyutlama, ilişkilendirme, çıkarımda bulunma, sezgi, karar verme, ayırt etme), matematiksel yöntemler, üst biliş, inanç, sorumluluk, ısrar, problem üretme, yeniden üretme, matematiksel yetenek göstergelerini sergilemede üst yüzdelik dilimlerde yer alma ya da bunu akranlarından daha erken yaşlarda göstermenin yer aldığı söylenebilir.

Matematiksel yetkinlik, matematiksel güç veya matematiksel okuryazarlığın sergilenmesinde matematiksel üstün zeka kavramında yer alan özelliklerin işe koşulduğu söylenebilir. Matematikte üstün yetenekliliğin/ zekalılığın da belli bir yüzdelik dilimde kabul edilmesinin genel zeka kuramlarındaki üstün zekalılık sınırında olduğu gibi keyfi bir değerle ifade etmeden kaynaklı olduğu düşünülebilir. Erken gelişmişlik sergileyen matematikte üstün yeteneklilerin ise bu yüzdelik dilimlerde sadece kendi akranlarından değil, kendinden büyüklerle de kıyaslandığında üst dilimlerde yer almayı başaran kişiler olduğu düşünülebilir. Matematiksel üstün zeka ile matematiksel yaratıcılık kavramları arasındaki ilişki Sriraman (2005)'in görüşleriyle açıklanabilir. Sriraman, matematikte yaratıcı bireylerin aynı zamanda matematikte üstün zekalı olduğu buna karşın matematikte üstün zekalı bireylerin matematikte yaratıcı olmak zorunda olmadığını ifade etmiştir. Bu kısımda yer verilen matematiksel yetenek, matematikte gelecek vaat etme, matematikte üstün zekalı, matematikte yaratıcı ve matematikte erken gelişmiş kavramları arasındaki ilişkilere yönelik araştırmacının düşünceleri Şekil 1'de yer alan içe içe kümelerden oluşan yapıyla görselleştirilmiştir.



Şekil 1. Matematiksel Yetenek Kavramları Arasındaki İlişki

Matematiksel yetenekle ilişkili kavramlarda yer alan önemli beceriler ve noktalardan bazıları: matematik bilgisine sahip olma, onu kullanma, işleme; etkili problem çözmede kullanılan bilişsel stratejiler, analitik ve yaratıcı beceriler (genelleme, soyutlama, ilişkilendirme, çıkarımda bulunma, sezgi, karar verme, ayırt etme), matematiksel yöntemler, üst biliş, inanç, sorumluluk, ısrar, problem üretme, yeniden üretme, matematiksel yetenek göstergelerini sergilemede üst yüzdelik dilimlerde yer alma ya da bunu akranlarından daha erken yaşlarda göstermenin yer aldığı söylenebilir.

Şekil 1'de görüldüğü üzere en genel/ en dıştaki küme matematiksel yetenek alanı olarak düşünülmüş, bundan daha az kapsamlı olan kümede matematikte umut/ gelecek vaat edenlerin yer aldığı, bunun bir alt kümesini matematikte üstün zekalı/ yetenekli kişilerin oluşturduğu en içte yer alan iki kümeden birisinin matematikte yaratıcı bireylerin, diğerinin ise matematikte erken gelişmiş bireylerin oluşturduğu varsayılmıştır. Matematikte yaratıcı olan bireyler matematikte erken gelişmişler kümesindeki bireylerden de oluşabileceği ancak erken gelişmiş bireylerin hepsinin yaratıcı olmayabileceği, ancak matematikte üstün zekalı olarak değerlendirilebileceği düşünülmüştür.

Matematikte Üstün Yetenekli Öğrencilerin Özellikleri

Alan yazındaki matematikte üstün yetenekli öğrenci özelliklerinin hem bilişsel özellikler hem de duyuşsal birtakım özellikleri içerdiği söylenebilir. Ancak matematikte üstün yetenekli öğrencilerin bu kısımda verilen özelliklerin hepsini aynı anda göstermeyeceğini belirtmekte yarar vardır.

Alan yazında matematikte yetenekli öğrencilerin özellikleri olarak: örüntü ve ilişkileri algılama, görselleştirme ve genelleme yeteneği; nicel bilgiye yönelik erken ve keskin farkındalık; matematiksel konulara meraklı olma ve anlama; zor problemleri çözmede ısrarlı bir tutum sergileme ve enerjik olma; akıl yürütme süreçlerini tersine çevirebilme ve yöntemleri kolaylıkla değiştirebilme yeteneği; matematiksel kavramlarla akıcı, esnek, yaratıcı yollarla çalışabilme yeteneği; matematik problemleri çözme yanında matematiksel problemler üretmeye de eğilimli olma; öğrendiklerini yeni durumlara transfer etme; verileri birçok yolla organize ederek onlarla çalışabilme ve ilgisiz olanları eleme gibi özellikler ön plana çıkmaktadır (House, 1987 & Greenes, 1981'den akt. Sheffield, 1994, s. xi).

Yukarıda değinilen özelliklere ilaveten matematiksel fikirleri öğrenme, anlama ve uygulamada hızlı olma ile soyut düşünme ve çalışmada yetenekli olma da matematikte üstün yetenekli öğrenci özellikleri arasında görülmektedir (Miller, 1990). Matematikte üstün yetenekli öğrencilerin alana yönelik ilgilerinin matematik alanında düzenlenen olimpiyatlar ve yarışmalara katılma durumlarında görülebileceği ve bu tür etkinliklerde elde edilen başarıların, kazanılan ödüllerin de bir nevi matematiksel yeteneğin göstergesi olduğu düşünülebilir (Choi, 2009). Olimpiyatlarda derece alan öğrencilerin katıldığı bir araştırmanın bulgularında üstün yetenekli öğrenci özellikleri olarak çalışkanlık, yarışmacı olma, öz disiplinli olma, kendine güven, ısrar, inanç, gibi özelliklerin ortaya çıktığı görülmüştür (Choi, 2009). Araştırmada ayrıca matematikte üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel bilgilerinin iyi düzeyde, genel not ortalamalarının yüksek ve matematiğe karsı tutumlarının olumlu olduğu da bulunmuştur.

Matematikte Üstün Yeteneklileri Tanılamada Temel Alınan Tanım, Model ve Yaklaşımlar

Bu kısımda alan yazında matematiksel yeteneği tanılama ve tanılama aracı geliştirme, model ve araçların etkililiklerini incelemeye yönelik çalışmalarda temel alınan matematiksel yetenek, üstünlük tanımlarında temel alınan teorik yaklaşımlar, yetenek bileşenlerine ilişkin tartışmalara yer verilmiştir. Bu kuramsal yaklaşım ve matematik yetenek bileşenlerinin incelenmesiyle alan yazında önemli görülen teorik yaklaşım ve matematik yetenek bileşenlerinin ortaya koyulabileceği düşünülmüştür.

Sak'ın (2005) matematiksel yeteneği tanılamada kullanılmak üzere geliştirdiği Üçlü Matematiksel Zihin Modeli'nde analitik, yaratıcı ve uzman zihinler olarak adlandırılan üç ayrı yetenek ve bunların etkileşimiyle oluşan yetenek türleri bulunmaktadır. Model matematikçilerin görüşleri, R. Sternberg'in Başarılı Zeka Kuramı ve uzmanlık üzerine yapılan çalışmalar üzerine temellendirilmiştir.

Livne (2001) ile Livne ve Milgram (2006), matematiksel üstün yetenkliliği iki boyutlu bir yapı olarak tanımlamışlardır. Bu yapının birinci boyutu yetenek türü olup iki akademik, iki tane de yaratıcı yetenek içermektedir. Yapının ikinci boyutunu yetenek düzeyleri oluşturmaktadır. Birinci boyutu oluşturan dört yetenek türünün her biri dört düzeye sahiptir. Bu düzeylerden biri normal yetenekli (nongifted ability) düzeyi; diğerleri de hiyerarşik olarak biraz (mild), orta (moderate) ve çok (profound) yetenekli olma seklinde ifade edilmiştir. Bu düzeyler bir hiyerarşi belirtmektedir. Hiyerarşinin üstüne doğru gidildikçe o düzeyde yer alan kişi sayısı azalmaktadır (Livne & Milgram, 2006). Araştırmacılar matematiksel yeteneğin akademik ve yaratıcı olarak ifade edilen yetenek türlerinden akademik yetenek (genel zihinsel yetenek de demektedirler), soyut düşünme ve problemleri mantıksal ve sistematik çözme yeteneği olarak ifade etmişlerdir. Genel orijinal/ yaratıcı düşünme ise, problem çözme sürecinde yüksek nitelikte birkaç yaratıcı çözüm üretmek ya da çok sayıda fikir veya çözümler üretme yeteneği olarak görülmektedir (s. 200). Livne ve Milgram (2006) matematikte üstün yeteneklilik modellerinde iki türde alana özgü matematiksel yetenek olduğunu iddia etmişlerdir. Alana özgü akademik yeteneğin açıklamasında genel zekanın/ yeteneğin matematiğe uygulanması ifadeleri geçmektedir. Matematikte standart-mantıksal düşünme, hesaplama yeteneği, matematiksel kavramlar, ilkeler bilgisi ve muhakeme ile alana özgü matematik yeteneğinin sergilendiği belirtilmiştir. Alana özgü akademik matematik yeteneğine benzer olarak matematikte alana özgü yaratıcı yeteneğin tanımlanmasında da genel yaratıcı düşünme yeteneğinin matematiğe uygulanması dikkate alınmıştır.

Pitta-Pantazi, Christou, Kontoyianni ve Kattou (2011) doğal/ bilişsel (natural/ cognitive), yaratıcı ve matematiksel yetenekleri entegre eden yeni bir tanılama modeli önermişlerdir. Modelde matematiksel üstün zekalılık (mathematical giftedness) ortalama üstü matematiksel yetenek ve matematiksel yaratıcılıktan oluşmaktadır, bunun yanında doğal/ bilişsel yetenekler matematiksel üstün zekâlılığı tahmin etmektedir. Modelde matematiksel yetenekler niteliksel-analitik (qualitative-analytic), nicel- ilişkisel (quantitative- relational), nedensel- deneyimsel (casual- experimental); uzaysal- imgelemsel (spatial- imaginative), sözel- önerisel (verbal- quantitative) olarak beş ayrı yetenek üzerinden analiz edilmiştir (Demetriou, Christou, Spanoudis, & Platsidou, 2002'den akt. Pitta-Pantazi vd., 2011). Bu yetenek türlerinin bireylerin bilgiyi temsil etme, zihinsel olarak manipüle etme ve anlaması için kullanıldığı ifade edilmiştir. Modelde temel alınan yaratıcılık kavramı, matematik alanında akıcı, esnek ve orijinallik kriterleri ile değerlendirilmiştir. Tanılama modelinde araştırmacılar, matematiksel yaratıcılığı, matematiksel üstün zekâlılığın bir özelliği olarak gerekli görürken, yaratıcılığın üstün yeteneklilik için yegane koşul olmadığını düşünmektedirler. Modelde yaratıcılık gerekli olmakla beraber matematiksel üstün zekâlılık için yegane koşul olarak görülmemektedir.

Kim, Cho ve Ahn (2003) matematikte üstün zekalıyı (mathematically gifted) yaratıcı bir matematikçi olma potansiyeli olan, matematik problemlerini yaratıcı bir yolla çözmede yüksek yetenek gösteren ve geliştirdikleri matematikte yaratıcı problem çözme testinde üstün performans gösteren kişi olarak ifade etmişlerdir (s. 165). Araştırmacılar matematiksel yetenek testinin geliştirilmesinde yaratıcılık, problem çözme ve üstün zekalılık üzerine çalışan araştırmacıların fikirlerinden yararlandıklarını ifade etmişlerdir. Yaratıcı problem çözme süreci problemleri anlama, problemleri çözmek için plan yapma, planı uygulama ve yansıtma yapma aşamalarını içermektedir. Matematiksel yaratıcı problem çözme için bu dört aşama boyunca matematiksel düşünme yeteneği (soyutlama, uzamsal algı, görselleştirme soyutlama, muhakeme, iç görü, genelleme, yansıtıcı düşünme vb.), matematiksel yaratıcılık, matematiksel göreve odaklanma ve bilgi temelinden yararlanıldığını ifade etmişlerdir. Ayrıca matematiksel yaratıcı problem çözmede tekil (convergent) ve çoğul (divergent) düşünmenin işe koşulduğunu da belirtmişlerdir.

Niederer, Irwin, Irwin ve Reilly (2003) matematikte üstün zekâlılığı matematikte zor problemleri açık ve zarif bir yolla çözebilme yeteneği olarak görmektedirler. Geliştirdikleri problem çözme testinden %50 başarı elde edenleri de matematikte üstün zekalı olarak nitelendirmektedirler. Araştırmacıların, matematikte üstün zekalılık tanımlarının genel ve zor problemleri çözme kavramıyla sınırlandırdıkları söylenebilir.

Osborn (1983), matematiksel yetenekleri hesaplama işlemleri, örüntü tanıma, mantıksal muhakeme ve soyut niceliklerin sembolik manipülasyonu şeklinde dört bileşen üzerinden açıklamıştır.

Söz konusu bileşenler, bir matematik aktivitesinin gerektirdiği düşünme türünün bileşenleri olarak görülmekte olup, bu bileşenlerdeki yetkinliklerin birleşimiyle oluşturulan bir profil üzerinden matematiksel yetenek düzeyleri ifade edilmektedir. Osborn'nun matematiksel yetenek bileşenlerinin alana özgü bileşenlere odaklandığı, bu bileşenlerle ilgili belirlenen spesifik alt becerilerle bu alanlardaki güçlü ve zayıf yönlerinin belirlenmesini sağlayan bir profil üzerinden matematiksel yetenek hakkında yorum yapmaya olanak sunduğu söylenebilir.

Osborn'un matematiksel yetenekler bileşenlerine benzer olarak Wilmott (1983), çalışmasında yüksek matematiksel yeteneğe (high mathematical ability) katkı sağlayan çeşitli düşünme türleri belirlemiştir. Üst düzey matematik yeteneğinin ortaya çıkmasında rol alan düşünme türleri: niceliksel düşünme (quantitative thinking); örüntü, yapı ve ilişkileri algılama; tümevarımsal muhakeme ve genelleme; tümdengelimsel ve analitik muhakeme olarak ifade edilmiştir.

Alan yazındaki birçok çalışmada matematiksel yeteneğe yönelik bakış açılarından kaynaklı, farklı tanılama yollarının izlendiği görülmektedir. Çalışmaların çoğunda teorik bir modelden ziyade teorik yaklaşımlar temel alınarak çeşitli yetenek testlerinin geliştirildiği veya mevcut testler farklı şekillerde kullanılarak tanılama yapıldığı söylenebilir.

Matematikte Benzerlik ve İlişki Temelli Düşünme Modeli

Bu kısımda alan yazın incelemesi sonucunda araştırmacının matematiksel yeteneği tanılamada önemli gördüğü bileşenler, yetenekler ve becerileri temel alarak geliştirilmiş olan MBİTD-M açıklanmıştır.

Matematik alanında kilometre taşı niteliğindeki büyük becerilerin tespit edilmesi, matematik yeteneğinin tanılanmasına yönelik yapılacak çalışmalarda yol gösterici olabilir (Sak, 2005). Bununla birlikte kilometre taşı niteliğindeki büyük becerilerin çoğunluğunun da altında yer alabilecek, ortak çekirdek becerilerin de belirlenerek bu beceriler üzerinden de matematiksel yetenek tanılamasının yapılabileceği düşünülmektedir. Bu nedenle matematik alanında etkili olan çekirdek becerilerin tespit edilmesi için "matematiksel yetenek üzerine çalışmak isteyen bir araştırmacın matematiğin nasıl tanımlandığı, bu alanda bilginin nasıl üretildiği, matematikçilerin bilgi üretirken kullandıkları araçların neler olduğunu sorgulaması beklenir" (Sak, 2005, s. 31) düşüncesinden hareketle öncelikle matematiğin doğası incelenmiştir. Matematiğin doğasıyla birlikte, matematikçiler ne ile uğraşır başlığı altında matematikçilerin matematik yapmada önemli gördüğü görevler ve gerekli bilişsel beceriler incelenmiştir. Daha sonrasında alan yazında matematiksel yetenekle ilişkili görülen kavramlar, matematikte üstün yetenekli öğrenci özellikleri ve tanılama çalışmalarında dikkate alınan çeşitli tanım, model ve yaklaşımlar incelenmiştir.

Matematiğin doğasına bakıldığında onun matematiksel nesnelere özgü özellikler ortaya çıkarma, belirleme ve ispatlama bilimi, örüntülerin bilimi, problem çözme ve saptamanın dili gibi ifadelerle tanımlanmaya çalışıldığı söylenebilir. Matematikçilerin ne ile uğraştığının incelenmesi sonucunda matematikçilerin araştırma yapma ya da matematik yapmadan kastettikleri şeylerin tanımlara benzer olarak problem çözme, problem bulma/ kurma olduğu sonuçlarına ulaşılmıştır. Matematikçiler problem çözme ve problem kurmada her ikisinde de mevcut ve yeni problemler arasında karşılaştırmalar yapmaktadırlar. Problem çözme etkinliklerinde problemleri karşılaştırmayla, daha önceden çözdüğü bir problem ile mevcut problem arasındaki yüzeysel ya da ilişkisel benzerlikler kurarak mevcut problemi çözme sürecinden yararlanabilmektedirler. Bunun yanında yine problem ortaya atma ya da kurma etkinliklerinde de özellikle yeni ve önemli bir problem ortaya atıp atmadığını değerlendirme noktasında eldeki problemin geçmiş problemlere benzerlik ya da farklılıklarını karşılaştırarak inceleme yapması gerektiği söylenebilir. Hem matematiğin doğası hem matematikçilerin matematik yapma faaliyetlerinde problem çözme ve problem kurmanın oldukça önemli olduğu bunların yanında her iki faaliyetin daha işlevsel ve etkin gerçekleştirilmesinde örtük olarak yapılan bir diğer önemli şeyin problemleri karşılaştırma becerisi olduğu ve üçünün birbiriyle etkileşim halinde olduğu düşünülmektedir. Ayrıca matematikçilerin problem çözme ve kurma süreçlerinde akla yakın muhakeme veya sezgici zihin ile tümdengelimsel muhakeme veya mantıkçı zihni kullandıkları ve bu genel kilometre taşı niteliğindeki becerilerde analojilerin/ benzetmelerin oldukça önemli görüldüğü saptanmıştır. Yine matematiğin tanımlarında da örüntü ve ilişki, nesneler arasındaki özellikleri belirleme, yeni özellikler ortaya atma vb. birçok durumda da aslında benzerlik ve ilişkilerden yararlanıldığı da söylenebilir. Bu noktada araştırmacı analojilerin (benzerlik ve ilişki temelli) düşünme olarak matematikte çekirdek bir beceri olarak düşünülebileceğini varsaymıştır.

Matematiksel yetenek ve matematiksel üstünlükle ilgili kavramların incelenmesi sonucunda da izleyen çıkarımlara ulaşılmıştır. Krutetskii'nin (1976), matematiksel yetenek bileşenleri olan matematiği anlama, onunla uğraşmayı sürdürme, matematiksel bilgiyi koruma ve bu bilgi ile dünyaya matematiksel bakış açısı ile bakma kavramları üzerinden matematiksel üstün yetenekliliğin yorumlanabileceği düşünülmektedir. Alan yazındaki diğer matematiksel yetenek kavramlarında üstün yetenekliliğin; yetkinlik, güç, erken gelişmişlik, umut vaat etme, üstün zekalılık, okur yazarlık, yaratıcılık vb. kavramlarla ifade edilmeye çalışıldığı görülmüştür. Bu kavramlarda ve alan yazındaki matematiksel üstün yeteneklilik özellikleri ve tanılama yaklaşımlarında değinilen noktalara izleyen örnekler verilebilir. Yetenek (yapabiliyor olma durumu), matematiksel bilginin varlığı, olağanüstü muhakeme, üstün başarı sağlama gibi genel gereklilikler veya göstergeler tanımlarda ön plana çıkmaktadır. Ayrıca duyuş, ısrar, inanç, sorumluluk gibi duyuşsal beceriler veya göstergelere de bazı tanımlarda değinildiği görülmüştür. Yine tanımlarda göze çarpan ve yetenek kavramıyla ilgili soyutlama, genelleme; mantıksal düşünme; çıkarımda bulunma; formüle etme, tahmin etme, muhakeme, ilişkilendirme, analojik herüstik düşünme, ampirik/ teorik ilkeleri ayırabilme, problemleri/ ilişkileri görselleştirme vb. gibi genelde analitik olarak görülen bilişsel beceriler tespit edilmiştir. Matematiksel işlemlerde esneklik, tersine çevrilebilirlik, matematiksel ispat için sezgisel farkındalık, bilineni genişletme, araştırmacılar için yeni sorular bulma, problemlere içgörüsel çözümler üretme, ilkeleri keşfetme vb. gibi yaratıcılıkla ilişkilendirilen beceriler de tanım ve yaklaşımlarda görülmektedir.

Matematikte üstün yetenekli öğrencilerin tanılanmasında kullanılmak üzere matematiksel yeteneğin tüm boyutlarıyla değil de matematiksel yeteneğin ortaya çıkması ve performansa yansımasında büyük rolü olduğu varsayılan temel çekirdek becerilerden "benzerlik ve ilişki kavramlarından (analoji)" hareketle matematiksel yeteneği problem çözme, problem kurma ve problemleri karşılaştırma yapıları üzerinden tahmin etmede kullanılabilecek bir model geliştirilmiştir. Modelin bu şekilde geliştirilmesinde Davidson ve Sternberg'ten (1984) esinlenilmiştir. Davidson ve Sternberg'in (1984) üstün zekanın içgörüsel kuramında araştırmacılar üstün zekayı tüm boyutlarıyla değil onu açıklamada, tahmin etmede önemli olan alt beceriler üzerinden bir alt teori (subtheory) önermişlerdir. Bu çalışmada geliştirilen modelde de benzerlik ve ilişki kavramları problem çözme, problem kurma ve problemleri karşılaştırmada kullanılmaktadır.

Genel bilişsel özelliklerin matematiksel sembol, harf, şekil vb. nesnelerin kullanımında spesifik yetenek olarak davrandığı varsayılmaktadır (Krutestkii, 1976). Matematiği anlama/ kavrama, matematiksel bilgiyi işleme ve hafızada tutma ile etkileşen matematiksel düşünüş şeklinin *problem çözme, problem bulma, problemleri karşılaştırma* üzerinden aktive olacağı düşünülmektedir. Böylece matematikçilerin matematik yaparken işe koştuğu matematiksel muhakeme, akla yakın muhakeme, tümdengelimsel muhakeme, analiz, sezginin işe koşulması ile genelleme, soyutlama, teoremlere ulaşma ve ispatlama ile yeniden üretim veya yeni bilgi üretimiyle matematiği ilerletme ve matematiksel uzmanlığı arttırma olanağı elde edilebilir.

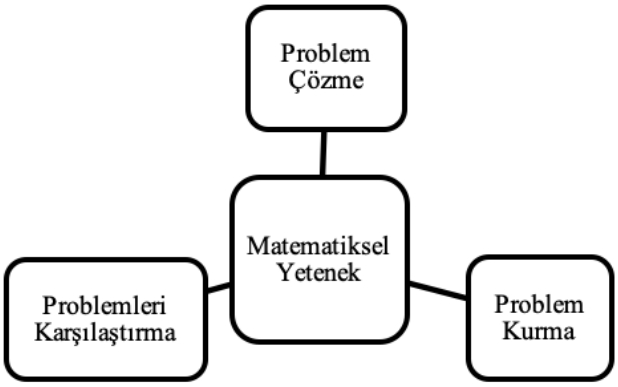
Modelin oluşturulmasında Krutetskii'nin (1976) genel yetenekle ilişkilendirilen bir beceri/ aracın matematiksel içerikle uğraşırken spesifik bir beceriymiş gibi davrandığı görüşü benzerlik ve ilişki kavramlarına uygulanmıştır. Analojik düşünme, analojik muhakeme çekirdek bilişsel becerilerden görüldüğü (Hofstadter, 2001) ve birçok önemli becerinin altında yer aldığı (Gust, Krumnack, Kühnberger, & Schwering, 2008) için genel bilişsel yeteneğe ait bir beceriymiş gibi düşünülmesine rağmen matematik disiplininde matematiğe özgü spesifik bir çekirdek beceri gibi davrandığı varsayılmıştır. Ayrıca modelde analojik düşünme benzerlik ve ilişki temelli düşünme olarak ele alınmıştır.

Krutetskii'nin (1976) matematiksel yetenek tanımı matematik öğretimiyle kazanılabilecek becerilere vurgu yaparak ilk adımı oluşturmaktadır. Polya (1954) ve Poincare (1907, 1989) ise gerçek matematikçilerin matematik bilgisini edinmesiyle onun nasıl işlediğine yönelik ipuçları vermişlerdir. Matematikte analitik ve yaratıcı sürecin birlikte işlediği düşünülmektedir. Bir taraftan matematiksel nesneler üzerindeki benzerlik ve ilişkilerin gözlemlenmesiyle ve/ veya sezgiyle tahminler, genellemeler elde edilmekte ardından bunun doğrulanması çabasına girişilmesi söz konusudur. Polya'nın (1954) belirttiği gibi akla yakın muhakeme ve tümdengelimsel muhakeme karşılıklı etkileşim içerisindedir ve her ikisinin de öğrenilmesi gerekmektedir. Matematiğin hem öğretiminde hem de aktif matematikçilerin matematik yapma metotları dikkate alındığında matematikte üstün yeteneğin *problem çözme, problem kurma* ve *problemleri karşılaştırma* üzerinden incelenebileceği görüşü doğmuştur.

Ayrıca bu zamana kadar yapılan birçok tanılama çalışmalarında genellikle büyük becerilerin dikkate alındığı ya da yeteneğin içindeki çekirdek bileşenden ziyade kavramsal olarak alan için önemli görülen becerilerin tespit edilerek işe koşulması sonucu tanılama çalışmaları yapıldığı söylenebilir (Örn. Kim, Cho, & Ahn, 2003; Osborn, 1983; Sak, 2005; Wilmott, 1983). Çalışmanın çekirdek bir becerinin birçok matematiksel becerinin altında yer alabileceği varsayımını kullanması ve bu çekirdek beceriden hareketle matematikte üstün yetenekliliğin tanılanmasını öngörmesi yönüyle diğer model, yaklaşımlardan ayrılmaktadır.

Modelde biliş için çekirdek beceri kabul edilen, matematiğin doğasında bulunan ve matematikçilerin değer atfettiği *benzerlik* ve *ilişki* kavramları temel alınarak benzerliğe dayalı problem çözme, ilişkiye dayalı problem çözme, benzerliğe dayalı problem kurma, ilişkiye dayalı problem kurma, benzer problemleri bulma ve ilişkili problemleri bulma şeklinde modelin diğer alt bileşenleri oluşturulmuştur. Bu altılı yapı kullanılarak klasik analojiler ya da diğer problemler, etkinlikler, görevlerde çeşitli benzerlikler ya da ilişkilerin açıklığa kavuşturulmasıyla problem çözme, problemler kurma ve problemleri karşılaştırma süreçleri gerçekleştirilebilir.

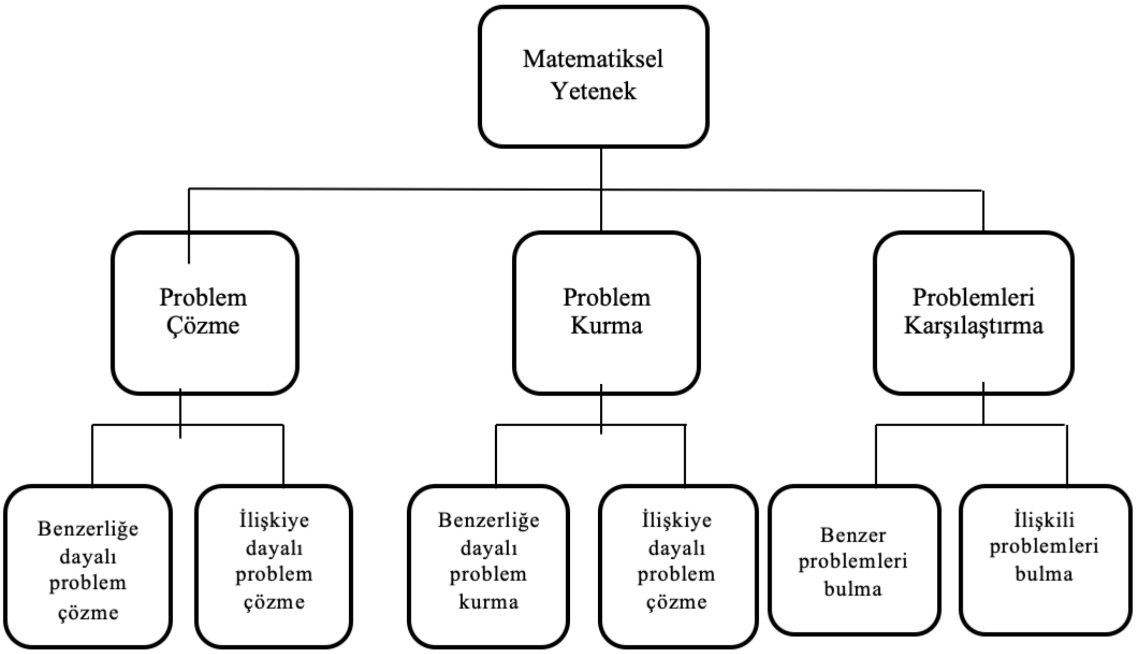
Modelde benzerlik kavramı Tversky (1977)'den hareketle, nesnelerin bir özellikler koleksiyonundan bir özellik eşleştirme işlemi olarak tanımlanmıştır. Nesnelerin benzerliği, nesnelerin ortak ve ayrıt edici özelliklerinin lineer bir kombinasyonu veya bir zıtlığı olarak, bir referans çerçevesine ve bir kontekste bağlı değerlendirilebilir (Tversky, 1977). İlişki kavramı iki veya daha fazla nesne, kavram, problem vb.'nin ikisi arasında bir kural, bağ, bağlantı kurulması olarak ele alınmıştır. İlişki kavramıyla yine benzerliğin bir türü olan analojilere ulaşma hedeflenmiştir. Benzerlik kavramıyla matematiksel nesnelerin ortak paylaştıkları çeşitli özellikler dikkate alınırken; ilişki kavramıyla daha çok nesneler arasında kurulan bağların benzerliği, oranların eşitliği, aynılığı ile daha üst düzey bir benzerlik olan analojiler dikkate alınmıştır. MBİTD-M'nin genel çerçevesi Şekil 2'de sunulmuştur.



Şekil 2. Matematikte Benzerlik ve İlişki Temelli Düşünme Modeli'nin Çerçevesi

Modelin temel yapıları ve bu yapıların altında yer alan benzerlik ve ilişkiyi temel alan alt bileşenlerle birlikte betimlendiği görsel şekil 3'te gösterilmiştir.

MBİTD-M benzerlik ve ilişki kavramlarının problem çözme, problem kurma, problemleri karşılaştırma gibi görevlerde kullanılarak altı farklı şekilde alt boyutlar üzerinden değerlendirme yapmaya olanak sağlayabilir. Modelin hem alternatif değerlendirme süreçlerinde hem de kağıt-kalem testi şeklinde geliştirilecek testler kullanılarak matematik alanında üstün yeteneklileri tanılamada kullanılması önerilmektedir. Ayrıca model kullanılarak matematikte üstün yetenekli öğrenciler ve genel matematik öğrencileri için de matematiksel etkinlikler ve programların da geliştirilebileceği düşünülmektedir.



Şekil 3. *Matematikte Benzerlik ve İlişki Temelli Düşünme Modeli*

Kaynakça

Altun, M. (1998). Matematik öğretiminin amaç ve ilkeleri. A. Özdaş (Ed.), *Matematik öğretimi* içinde (ss. 1-17). Eskişehir: AÖF Yayınları.

Bennett, J., Berriozabal, M., DeArmond, M., Sheffield, L., & Wertheimer R. (1995). *NCTM task force on promising students.* National Council of Teachers of Mathematics. Retrieved March 17, 2010 from the Northern Kentucky University Website http://www.nku.edu/~sheffield/taskforce.html

Choi, K. M. (2009). Characteristics of Korean international mathematical Olympiad (IMO) winners' and various developmental influences (Order No. 3386133). Available from ProQuest Dissertations & Theses Global. (304862437). Retrieved from http://search.proquest.com/docview/304862437?accountid=11637

Devlin, K. (2000). *The math gene: How mathematical thinking evolved and why numbers are like gossip.* NY: Basic Books.

Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (1984). The role of insight in intellectual giftedness. *Gifted Child Quarterly, 28*(2), 58-64.

Gavin, M. K., & Adelson, J. L. (2008). Mathematics, elementary. In J., Plucker & C. Callahan (Eds). *Critical issues and practices in gifted education: What the research says* (pp.367-394). Waco, Tx: Prufrock Press.

Gust, H., Krumnack, U., Kühnberger, K.-U, & Schwering, A. (2008). Analogical reasoning: A core of cognition. *Zeitschrift für Künstliche Intelligenz (KI), Themenheft KI und Kognition* (1), 8-12.

Hardy, G. H. (1999). *Bir matematikçinin savunması* (Çev. N. Arık). Ankara: TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları.

Hofstadter, D. R. (2001). Analogy as the core of the cognition. In D. Genter, K. J. Holyoak, & B. Kokinov (Eds.), *The Analogical Mind: Perspectives from Cognitive Science* (pp. 499-538). Cambridge MA: The MIT Press/Bradford Book.

Keating, D. P., & Stanley, J. C. (1973). *Discovering quantitative precocity*. Presented at AREA, New Orleans.

Kim, H., Cho, S., & Ahn, D. (2003). Development of mathematical creative problem solving ability test for identification of the gifted in math. *Gifted Education International*, 18, 164-174. doi:10.1177/026142940301800206

King, J. (2006). *Matematik sanatı* (Çev. N. Arık), Ankara: Tübitak Yayınları.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* (J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). (J. Teller, Trans.). Chigo: University of Chicago Press.

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In. R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and education of gifted students* (pp. 385-411). Rotterdam: Sense Publishers.

Livne, N. (2001). G*iftedness in mathematics as a bidimensional phenomenon: Theoretical definition and psychometric assessment of levels of academic ability and levels of creative ability in mathematics.* Unpublished doctoral dissertation. Tel Aviv University, Israel.

Livne, N. L., & Milgram, R. M. (2006). Academic versus creative abilities in mathematics: Two components the same construct? *Creative Research Journal, 18*(2), 192-212.

Mandacı Şahin, S. (2007). *8. Sınıf öğrencilerinin matematik gücünün belirlenmesi.* Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

MEB. (2009). *İlköğretim matematik dersi 1-5 sınıflar öğretim programı.* Ankara: MEB Yay.

Miller, R. C. (1990). *Discovering math talent.* Retrieved from ERIC database.

Napoles Valdes, J. E. (2012). Some reflections on mathematics and mathematicians: Simple questions, complex answers. *The MathematiEnthusiast (TME), 19*(1&2), 221-232.

NCTM (1989). *Evaluation: Standart 4- Mathematical power.* http://www.fayar.net/east/Teacher.web/Math/Standards/Previous/CurrEvStdevals4.htm adresinden 10.10.2014 tarihine alınmıştır.

Niederer, K. Irwin, R. J. Irwin, K. C., & Reilly, I. L. (2003). Identification of mathematically gifted children in New Zealand. *High Ability Studies, 14*(1), 71-84.

Osborn, H. (1983). The assessment of mathematical abilities. *Educational Research, 25*(1), 28-40. doi:10.1080/0013188830250104

PISA (2011). *PISA Türkiye 2011* .http://pisa.meb.gov.tr/wp content/uploads/2013/07/PISAkitab%C4%B1.pdf adresinden 10.10.2014 tarihinde alınmıştır.

Poincare, H. (1907). *The value of science* (G. B. Halsted Trans.). NY: The Science Press.

Poincare, H. (1989). *Bilim ve metot* (Çev. H. R. Atademir & S. Ölçen). İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics: Volume I of mathematics and plausible reasoning.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Kontoyianni, K., & Kattou, M. (2011). A model of mathematical giftedness: Integrating natural, creative, and mathematical ability. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11*(1), 39-54. doi:10.1080/14926156.2011.548900

Russell, B. (2010). *Principles of mathematics.* Abingdon, Oxon: Routledge.

Sak, U. (2005).M3: The three-mathematical minds model for the identification of mathematically gifted students (Order No. 3162062). Available from ProQuest Dissertations & Theses Global. (305022984). Retrieved from http://search.proquest.com/docview/305022984?accountid=11637

Sak, U., Karabacak, F., Kılıç, A., & Öksüz, C. (2010). *MBE3: Üstün zekalı öğrencilerin tanılanmasında ve eğitimlerinde üçlü matematiksel ve bilimsel tanılama ve öğretim yetenek modeli.* Proje no:107K059. http://www.tuzyeksav.org.tr/Uploads/pdf/proje-mbe3-ustun-zekali adresinden alınmıştır.

Schoenfeld, A. H. (2007). What is mathematical proficiency and how can it be assessed? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing mathematical proficiency* (pp. 59-73). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sheffield, L. J. (1994). *The development of gifted and talented mathematics studentds and the National Council of Teachers of Mathematics Standards.* (Report No. RBDM 9404). Storrs: National Research Center on the Gifted and Talented, University of Connecticut. (ERIC Document Reproduction Service No. ED388011).

Sriraman, B. (2005). Are Mathematical Giftedness and Mathematical Creativity Synonyms? A theoretical analysis of constructs. *Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20-36.

Sriraman, B. (2009a). Mathematically precocious. B. A. Kerr (Ed.), *Encyclopedia of giftedness, creativity and talent* (pp. 547-550). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Sriraman, B. (2009b). Mathematical intelligence. In B. A. Kerr (Ed.), *Encyclopedia of giftedness, creativity and talent* (pp. 544-547). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Tversky, A. (1977). Features of similarity. *Psychological Review, 84*(4), 327-352.

Umay, A. (2002). Öteki matematik. *Hacettepe Eğitim Fakültesi Dergisi,* 23, 275-281.

Yıldırım, C. (2008a). *Matematiksel düşünme* (2. basım). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, C. (2008b). *Bilimsel düşünme yöntemi* (2. basım). İstanbul: İmge Kitabevi Yayınları.

Wilmott, B. A. (1983). The design, administration and analysis of an instrument which identifies mathematically gifted students in grade four, five and six. (Order No. 8324673, University of Illinois at Urbana-Champaign). ProQuest Dissertations and Theses, Retrieved from http://search.proquest.com/docview/303163539?accountid=11637